Mr. sc. Drago Francišković
Viši predavač
Međimursko Veleučilište u Čakovcu
Bana Josipa Jelačića 22a, 40 000 Čakovec
E-mail: dfrancis@mathos.hr, dfrancis@mev.hr

ANALIZA POTPUNE KOMPENZACIJE POVEĆANJA ANUITETA ZBOG VALUTNE KLAUZULE PRODULJENJEM RAZDOBLJA OTPLATE

UDK / UDC: 336.781.5:336.77.067
JEL klasifikacija / JEL classification: E43
Izvorni znanstveni rad / Original scientific paper
Primljeno / Received: 2. listopada 2011. / October 6, 2011
Prihvaćeno za tisak / Accepted for publishing: 6. prosinca 2011. / December 6, 2011

Sažetak

U radu se promatra anuite, zajma s valutnom klauzulom u slučaju njegova povećanja, zbog rasta vrijednosti valute. Nalazi se uvećana duljina preostalog roka otplate kojim se poništava, tj. kompenzira takvo povećanje anuiteta. Dani su originalni izvodi funkcijskih veza između duljine takvog produljenog preostalog roka otplate, godišnje kamatne stope, stope povećanja anuiteta i duljine postojećeg preostalog roka otplate. Analiziraju se odnosi između tih veličina i izvode zaključci vezani za kompenzaciju povećanja anuiteta produljivanjem roka otplate. Prezentirane su granične vrijednosti spomenutih veličina iznad kojih kompenzacija nije moguća. Također je definirana stopa produljenja roka otplate te je dana lako primjenjiva formula za njenu donju ogradu.

Ključne riječi: anuitet, zajam, valutna klauzula, kompenzacija, povećanje anuiteta, stopa produljenja roka otplate.

1. UVOD

U radu se promatra zajam s valutnom klauzulom koji se otplaćuje jednakim postnumerando[1] mjesečnim anuitetima. Za jedan se mjesec uzima vremenski interval od jedne dvanaestine godine. Takav se mjesec uzima kao jedinični vremenski interval. Neka je $i \geq 0$ nominalna godišnja kamatna stopa

[1] Postnumerando mjesečni anuitet – anuitet plativ krajem mjesečnog razdoblja.

(n.g.k.s.)[2] koja se koristi pri izračunu vrijednosti anuiteta. Vrijednost mjesečnog anuiteta x_i u kunama prema tečaju na prvi dan razdoblja otplate (mjesec dana prije uplate prvog anuiteta)[3], dana je poznatom formulom:

$$x_i = x_i(n) = L\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} \tag{1}$$

gdje je

L – iznos zajma u kunskoj protuvrijednosti na početku razdoblja otplate;

n – duljina razdoblja otplate, tj. broj anuiteta ($[0, n]$ razdoblje/rok je otplate);

$r = 1 + \frac{i}{12}$ – mjesečni (relativni) kamatni faktor računat korištenjem relativne mjesečne kamatne stope $i/12$ kako je i uobičajeno pri izračunu anuiteta u bankama u Hrvatskoj.[4] Formula (1) za računanje anuiteta x_i vrijedi i ako L predstavlja ostatak duga neposredno nakon otplate anuiteta u nekom trenutku $t = 0$, a n je duljina ostatka roka otplate, tj. broj za otplatu preostalih anuiteta.

Promijeni li se kamatna stopa i u trenutku otplate nekog anuiteta t, nova vrijednost preostalih (neotplaćenih) anuiteta računa se koristeći (1), tako da se uzme da je $t = 0$; n je duljina preostalog roka otplate, odnosno broj preostalih anuiteta; r je novi kamatni faktor, a za L uzme se da je ostatak duga neposredno nakon otplate anuiteta u trenutku t.[5] Upravo je to slučaj koji se ovdje promatra. Nadalje, i je tekuća kamatna stopa, tj. ona po kojoj je izračunata posljednja vrijednost anuiteta $x_i(n)$.

Promatrajmo anuitet koji se otplaćuje u trenutku t. Njegova je vrijednost, bez primjene valutne klauzule, $x_i(n)$. Neka je $(1+p)$ faktor promjene vrijednosti u kunama strane valute na koju se valutna klauzula odnosi u trenutku t u odnosu na vrijednost te valute na početku razdoblja otplate.[6] Tada je vrijednost promatranog anuiteta u kunama u trenutku njegove otplate t, uz primjenu valutne klauzule, jednaka $(1+p)\,x_i(n)$. Dakle, p je stopa promjene[7]

[2] U radu je stopa izražena u jedinicama, a ne u stotninama (%) , kako je i uobičajeno u znanstvenoj literaturi.

[3] x_i je vrijednost anuiteta bez primjene valutne klauzule.

[4] Još se kaže da je mjesečni kamatni faktor računat proporcionalnom metodom.

[5] Isto vrijedi i u slučaju promjene kamatne stope dio mjeseca prije trenutka dospijeća anuiteta t. Tada ostatak duga L treba preračunati uzimajući u obzir trajanje nove kamatne stope i.

[6] (mjesec dana prije uplate prvog anuiteta)

[7] Od naročitog je interesa stopa povećanja anuiteta, tj. stopa promjene za $p>0$.

vrijednosti anuiteta x_i u trenutku njegove otplate t, zbog utjecaja valutne klauzule.

Povećanjem duljine otplate n, mjesečni se anuitet $x_i(n)$ strogo monotono smanjuje u varijabli n, tj. za $i \geq 0$ vrijedi da je $x_i(l) < x_i(k)$, za svaki $l > k$. Kako se n povećava, anuitet x_i u (1) padajući se monotono približava svojoj donjoj graničnoj vrijednosti $L \cdot i / 12$ jer je

$$\lim_{n \to \infty} x_i(n) = L \cdot (r-1) = L \frac{i}{12} \ .^{8} \tag{2}$$

Povećanjem broja preostalih jednakih mjesečnih anuiteta s k na l ($k < l$) vrijednost anuiteta se smanjuje s $x_i(k)$ na $x_i(l)$. Označimo s $s = s(r,k,l)$ pripadajuću stopu smanjenja. Tada je $0 < s < 1$. Imamo

$$s = s(r,k,l) = \frac{x_i(k) - x_i(l)}{x_i(k)} = 1 - \frac{r^l (r^k - 1)}{r^k (r^l - 1)} = \frac{r^l - r^k}{r^k (r^l - 1)} \ . \tag{3}$$

$(1-s)$ je faktor smanjenja vrijednosti anuiteta[9], odnosno za opisano povećanje broja anuiteta s k na l vrijednost se anuiteta smanji za $s \cdot 100\,\%$. Obrat te tvrdnje vrijedi samo do određene granične vrijednosti za $s = s(r,k,l)$, tj. uz uvjet da je $s < s_G(r,k) \leq 1$.

Granična vrijednost stope smanjena anuiteta je

$$s_G = s_G(r,k) = \lim_{l \to \infty} s = 1 - \frac{r^k - 1}{r^k} = \frac{1}{r^k} \ , \tag{4}$$

tj. *bilo koje povećanje duljine roka otplate ne može smanjiti vrijednosti anuiteta za više od* $\frac{100}{r^k}\,\%$. Možemo primijetiti da stopa smanjenja s i pripadna granična stopa s_G ne mijenjaju vrijednost proporcionalnim promjenama vrijednosti anuiteta.

---

[8] Dobivena je granična vrijednost vrijednost anuiteta u slučaju vječne rente.

[9] $(1-s)\, x_i(k) = x_i(l)$

2. POTPUNA KOMPENZACIJA POVEĆANJA ANUITETA

Istražimo sada mogućnost potpunog kompenziranja povećanja anuiteta $x_i(k)$ zbog valutne klauzule za $p \cdot 100\,\%$, tj. za faktor $(1+p)$ produljenjem duljine roka otplate, tj. povećanjem broja preostalih anuiteta. Prvo nas zanima za koliko treba smanjiti vrijednost anuiteta $(1+p)\,x_i(k)$ tako da dobijemo vrijednost $x_i(k)$.

Označimo li faktor smanjenja s $(1-s)$, iz $(1-s)(1+p)\,x_i(k) = x_i(k)$ slijedi

$$(1-s) = \frac{1}{(1+p)} \,, \tag{5}$$

odnosno $s = \frac{p}{(1+p)}$ [10], tj. traženi je postotak smanjenja $s \cdot 100\,\%$.

Za $s < s_G(r,k)$ traženo smanjenje možemo postići produljenjem duljine roka otplate s k na l. Pretpostavimo da se, uz određene uvjete, povećanje vrijednosti anuiteta s $x_i(k)$ na $(1+p)\,x_i(k)$ može kompenzirati produljenjem roka otplate s k na l. Cilj je naći uvjete uz koje takav l postoji. Za k i vrijednost anuiteta $(1+p)\,x_i(k)$ traži se takav l da je vrijednost anuiteta $(1+p)\,x_i(l)$ za $s \cdot 100\,\%$ manja od vrijednosti anuiteta $(1+p)\,x_i(k)$, tj. tako da vrijedi $(1+p)\,x_i(l) = (1-s)(1+p)\,x_i(k)$, odnosno $(1+p)\,x_i(l) = x_i(k)$. Odatle slijedi da je

$$p = p(r,k,l) = \frac{x_i(k) - x_i(l)}{x_i(l)} = \frac{r^k(r^l - 1)}{r^l(r^k - 1)} - 1 = \frac{r^l - r^k}{r^l(r^k - 1)} = \frac{r^{l-k} - 1}{r^{l-k}(r^k - 1)} \,. \tag{6}$$

p u (6) može se interpretirati kao stopa povećanja anuiteta koji se može kompenzirati povećanjem broja anuiteta s k na l.

Tražena vrijednost $l > 0$ dana je izrazom:

---

[10] Odnosno $p = \frac{s}{(1-s)}$.

$$l = l(p,r,k) = \frac{-\ln\left[1-(1+p)\frac{(r^k-1)}{r^k}\right]}{\ln(r)} = k + \frac{-1}{\ln(r)}\ln\left(1-p(r^k-1)\right). \tag{7}$$

Ona će postojati za sve vrijednosti $p > 0$, $r > 1$ i $k > 0$ iz trodimenzionalne domene pozitivne funkcije $l = l(p,r,k)$. Funkcija l ovisi o n.g.k.s. i preko r jer je $i = 12\cdot(r-1)$. Za poznate vrijednosti dvije od tri varijable p, k i i treba naći uvjete na treću varijablu koji osiguravaju postojanje pozitivne vrijednosti za l u.

2.1. Uvjet na duljinu promatranog preostalog roka otplate

Za stopu promjene anuiteta $p > 0$ i kamatnu stopu $i > 0$ traženi $l > 0$ postojat će samo dok je duljina promatranog roka otplate k manja od određene granične vrijednosti, tj. za $k < k_G(p,r)$. Za $k \geq k_G$ kompenzacija povećanja vrijednosti anuiteta povećanjem broja anuiteta nije moguća. Granična vrijednost duljine preostalog roka otplate je

$$k_G = k_G(p,r) = \frac{1}{\ln(r)}\ln\left(\frac{1+p}{p}\right). \tag{8}$$

Iz svojstva funkcije $k_G(p,r)$ u (8), slijedi da se granična duljina preostalog roka otplate k_G monotono smanjuje/povećava kada se kamatna stopa i i stopa promjene anuiteta p neovisno povećavaju/smanjuju.

Dakle, *za fiksnu stopu promjene anuiteta* p *povećanjem kamatne stope* i *klijente s preostalim rokom otplate većim od* k_G *nema ni teoretske mogućnosti za razmatranu kompenzaciju. Isto vrijedi i kada se za fiksni* i *povećava stopa povećanja anuiteta* p.

Primjeri graničnih vrijednosti k_G za odabrane vrijednosti p i i dani su u tablici 1.[11]

---

[11] Svi su izračuni dobiveni na bazi vlastitih programa autora, a grafovi korištenjem MS Excela.

Tablica 1.

Granične vrijednosti broja preostalih/neplaćenih anuiteta k_G .

	nominalna godišnja kamatna stopa i						
p	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
10%	720,6	576,7	480,8	412,3	360,9	320,9	288,9
15%	612,1	489,9	408,4	350,2	306,5	272,6	245,4
20%	538,4	430,9	359,2	308,1	269,7	239,8	215,9
25%	483,6	387,1	322,7	276,7	242,2	215,4	193,9
30%	440,6	352,7	294,0	252,1	220,7	196,2	176,7
35%	405,7	324,7	270,7	232,1	203,2	180,7	162,7
40%	376,5	301,3	251,2	**215,4**	188,5	167,7	151,0
45%	351,6	281,4	234,6	201,2	176,1	156,6	141,0
50%	330,1	264,2	**220,3**	188,9	165,3	147,0	132,4
60%	294,7	235,9	196,7	168,6	147,6	131,3	118,2

Primjerice, ako je n.g.k.s. $i = 6\,\%$, a stopa povećanja anuiteta $p = 50\,\%$, tada klijentima banke kojima je ostalo više od 220 mjesečnih otplata (anuiteta), niti teoretski[12] nije moguće u potpunosti kompenzirati povećanje vrijednosti mjesečne otplate povećanjem broja otplata. Dok bi, uz $i = 7\,\%$ i $p = 40\,\%$, teoretski to bilo moguće klijentima kojima je nije preostalo više od 215 mjesečnih otplata.

2.2. Uvjet na godišnju kamatnu stopu

Za $p > 0$ i preostali broj anuiteta $k > 0$ traženi $l > 0$ će postojati samo dok je kamatna stopa i manja od određene granične vrijednosti, tj. za $i < i_G(p,k)$. Za $i \geq i_G$ kompenzacija povećanja vrijednosti anuiteta povećanjem broja anuiteta nije moguća. Granična je vrijednost nominalne godišnje kamatne stope

$$i_G = i_G(p,k) = 12 \cdot \left(\sqrt[k]{\frac{1+p}{p}} - 1 \right) . \tag{9}$$

[12] Kada bi mogli živjeti dovoljno dugo.

Iz svojstva funkcije $i_G(p,k)$ u (9) slijedi da se granična kamatna stopa i_G monotono smanjuje/povećava kada se stopa promjene anuiteta p i duljina preostalog roka otplate k neovisno povećavaju/smanjuju.

Dakle, *za klijente s preostalim rokom otplate duljine* k*, povećanjem stope povećanja anuiteta* p *(tj. povećanjem vrijednosti referentne valute u odnosu na domicilnu) tekuća kamatna stopa postaje prevelika da bi kompenzacija i teoretski bila moguća*.

Primjeri graničnih vrijednosti i_G za odabrane vrijednosti k i p dani su u tablici 2.

Tablica 2.

Granične nominalne godišnje kamatne stope $i_G = 12(r_G - 1)$ u %.

k	stope povećanja anuiteta p						
	10%	20%	25%	30%	35%	40%	50%
120	24,22	18,05	16,20	14,75	13,58	12,59	11,04
150	19,34	14,42	12,94	11,79	10,85	10,06	8,82
180	16,09	12,00	10,78	9,82	9,03	8,38	7,35
210	13,78	10,28	9,23	8,41	7,74	**7,18**	**6,29**
240	12,05	8,99	8,07	7,35	6,77	6,28	5,51
270	10,70	7,99	7,17	6,53	6,01	5,58	4,89
300	9,63	7,19	6,46	5,88	5,41	5,02	4,40

Primjerice, za klijenta kojem preostaje više od 210 mjesečnih otplata, poveća li se vrijednost strane valute za 50%, ukoliko je tekuća n.g. kamatna stopa veća od 6,294%, niti teoretski kompenzacija povećanja anuiteta povećanjem njihova broja nije moguća. Za istog klijenta, poveća li se vrijednost valute za 40%, uz tekuću n. g. kamatnu stopu veću od 7,18%, situacija je ista.

2.3. Uvjet na stopu povećanja anuiteta

Za kamatnu stopu $i > 0$ i preostali broj anuiteta $k > 0$, traženi $l > 0$ će postojati samo dok je stopa povećanja anuiteta p manja od određene granične vrijednosti, tj. za $p < p_G(r,k)$.[13] Za $p \geq p_G$ kompenzacija povećanja vrijednosti anuiteta povećanjem broja anuiteta nije moguća. Granična je vrijednost stope povećanja anuiteta zbog promjene tečaja

$$p_G = p_G(r,k) = \lim_{l \to \infty} p = \frac{r^k}{r^k - 1} - 1 = \frac{1}{r^k - 1}\,.^{14} \tag{10}$$

Iz svojstva funkcije $p_G(r,k)$ u (10), slijedi da se granična stopa povećanja anuiteta p_G monotono smanjuje/povećava kada se i kamatna stopa i i duljina preostalog roka otplate k neovisno povećavaju/smanjuju, kao što se ilustrativno vidi u tablici 3.

Dakle, iz (10) slijedi da se *uz nominalnu godišnju kamatnu stopu* i (*odnosno relativni mjesečni faktor* r) *za klijenta s preostalim rokom otplate duljine* k *bilo kojim povećanjem duljine otplate ne može kompenzirati povećanje vrijednosti anuiteta koje je veće od* $1/(r^k - 1) \cdot 100\%$.

Primjeri graničnih vrijednosti p_G za odabrane vrijednosti k i i dani su u tablici 3.

Tablica 3.

Granične vrijednosti stope povećanja anuiteta p_G u %.

	nominalna godišnja kamatna stopa i						
k	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
60	452,5	352,9	286,7	239,4	204,1	176,8	155,0
90	286,4	220,3	176,5	145,4	122,2	104,3	90,1
120	203,7	154,6	122,0	99,0	82,0	68,9	58,6
150	154,5	115,5	89,8	71,8	58,5	48,4	40,4
180	121,9	89,8	**68,8**	54,1	43,3	35,2	29,0
210	98,9	71,7	54,0	41,8	32,9	26,3	21,2
240	81,8	58,4	**43,3**	32,9	25,5	20,0	15,8
270	68,7	48,2	35,2	26,3	19,9	15,3	11,9
300	58,4	40,3	28,9	21,2	15,8	11,9	9,0

[13] Za $i = 0$ $(r = 1)$, $p_G(r,k) = p_G(1,k) = \infty$ razmatrana kompenzacija uvijek je moguća.

[14] Ista se vrijednost dobije i iz uvjeta da je logaritam u (7) definiran, tj. da je izraz u (…) > 0.

Primjerice, ako je n.g.k.s. $i = 6\%$, a broj preostalih anuiteta $k = 240$ (preostali rok otplate 20 godina), tada povećanje iznosa anuiteta zbog valutne klauzule veće od 43,3% nikako u potpunosti ne može biti kompenzirano povećanjem broja anuiteta.

Kako se stopa povećanja anuiteta p približava graničnoj vrijednosti p_G, duljina novog roka otplate l enormno se povećava, što je u praksi neostvarivo ili neprihvatljivo. Čak i u slučaju kada p nije blizu granične vrijednosti p_G, povećanje duljine otplate za $l-k$ kojim se kompenzira povećanje vrijednosti anuiteta može biti toliko veliko da je u praksi totalna kompenzacija neostvariva ili neprihvatljiva od strane banke ili klijenta (vidi tablicu 4.).

Tablica 4. prikazuje apsolutne iznose produljenja duljine roka otplate $l-k$ kojima se kompenzira povećanje anuiteta po stopi p, ovisno o nekim vrijednostima i i k.

Tablica 4.

Apsolutni iznosi produljenja roka otplate $l-k$

kojima se u potpunosti kompenzira povećanje anuiteta po stopi p.

	nominalna godišnja kamatna stopa i								
	4%			6%			8%		
	povećanje anuiteta p			povećanje anuiteta p			povećanje anuiteta p		
k	20%	35%	50%	20%	35%	50%	20%	35%	50%
12	2,5	4,3	6,2	2,5	4,4	6,3	2,5	4,4	6,4
36	7,7	13,7	19,8	8,0	**14,3**	20,8	8,4	15,0	21,8
60	13,6	24,2	35,2	14,5	26,1	38,4	15,5	28,3	42,3
90	21,8	39,2	57,7	24,1	44,3	66,8	26,9	50,8	79,2
120	31,0	56,6	84,6	35,9	67,8	105,7	42,1	83,8	141,6
150	41,7	77,2	117,5	50,5	**99,0**	163,0	63,0	**137,2**	290,2
180	53,8	101,7	158,6	68,9	142,6	260,3	93,1	247,9	----
210	67,9	131,3	211,7	92,6	209,1	519,6	140,7	----	----
240	84,3	167,8	283,9	124,3	331,5	**----**	231,6	----	----
270	103,4	214,1	391,2	168,7	1086,4	----	----	----	----
300	126,1	275,2	584,2	236,8	----	----	----	----	----

Primjerice, za $i = 6\%$ i broj preostalih anuiteta $k = 150$, duljinu otplate treba povećati sa 150 na 249 (za $l-k$ =99, tj. za gotovo 2/3) da bi se kompenziralo povećanje vrijednosti anuiteta od 'samo' $p = 35\%$. Za isti slučaj $k = 150$, $p = 35\%$ pri kamatnoj stopi $i = 8\%$ trebalo bi anuitet povećati za $l-k$ =137,2 ili čak 91,5%. Za preostala 'samo' $k = 36$ anuiteta duljinu bi otplate trebalo povećati na 50,3 (za $l-k$ =14,3 , odnosno skoro 40%), tj. za 15 mjeseci[15] da bi se kompenziralo povećanje vrijednosti anuiteta od $p = 35\%$.

Iz svojstva funkcije $l(p,r,k)$ u (7) slijedi da se apsolutni iznos produljenja duljine otplate $l-k$ monotono povećava/smanjuje kada se i kamatna stopa i (odnosno mjesečni kamatni faktor r) i duljina preostalog roka otplate k i stope povećanja anuiteta p neovisno povećavaju/smanjuju, kao što se ilustrativno vidi i iz tablice 4. Iznos $l-k$ može se povećavati povećanjem iznosa p, k i i, ali samo do njihovih graničnih vrijednosti danih u (10), (8) i (9).

3. STOPA PRODULJENJA ROKA OTPLATE

Promotrimo relativno povećanje duljine roka otplate, odnosno stopu produljenja roka otplate s k na l, danu izrazom $\frac{(l-k)}{k}$. Uvrstimo li u (7) taj izraz, dobijemo stopu produljenja roka otplate $u = u(p,i,k)$ kojom se, uz kamatnu stopu i, u potpunosti kompenzira povećanje anuiteta po stopi p. Imamo:

$$u(p,i,k) = \frac{l(p,r(i),k)-k}{k} = \frac{-1}{\ln(r^k)} \ln\left(1 - p(r^k - 1)\right). \tag{11}$$

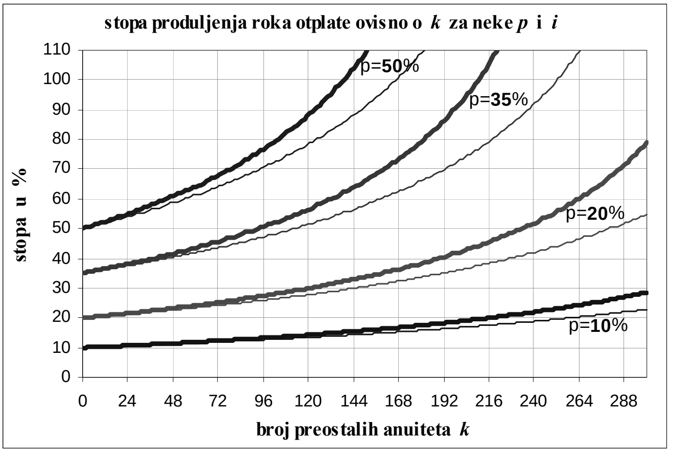
Iz svojstva funkcije $u(p,i,k)$ u (11) slijedi da se relativno produljenje roka otplate monotono povećava/smanjuje kada se i kamatna stopa i (odnosno r) i duljina preostalog roka otplate k i stopa povećanja anuiteta p neovisno povećavaju/smanjuju do svojih graničnih vrijednosti danih u (9), (8) i (10). (vidi tablicu 5. i slike 1. i 2.)

Grafovi na slici 1. pokazuju ponašanje stope produljenja roka otplate u za $p = 50\%$ (gornje dvije krivulje), $p = 35\%$ (3. i 4. krivulja odozgo),

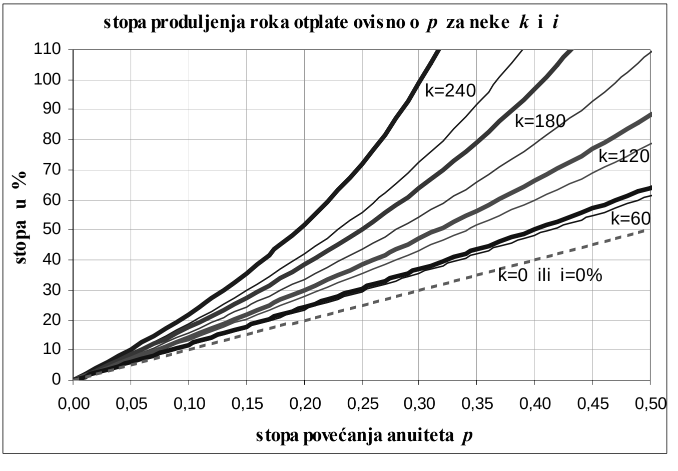
[15] Kako je teoretski broj anuiteta cijeli broj, posljednji 15. anuitet ima umanjenu vrijednost. Također se može načiniti ponovni izračun na točno 15 anuiteta, ali nešto umanjene vrijednosti.

$p = 20\%$ (5. i 6. krivulja odozgo), i $p = 10\%$ (donje dvije krivulje), u slučaju $i = 5\%$ (tanka linija) i $i = 6\%$ (podebljana linija).

Grafovi na slici 2. pokazuju ponašanje stope produljenja roka otplate u za $k = 60$, 120, 180 i 240 u slučaju $i = 5\%$ (tanka linija) i $i = 6\%$ (podebljana linija). Donja je isprekidana linija graf u graničnom slučaju $\lim_{k \to 0} u = p$ i/ili $\lim_{r \to 1} u = p$.



Slika 1.



Slika 2.

Tablica 5. prikazuje stope produljenja duljine otplate u kojima se, uz kamatnu stopu $i = 5$, 6 i 7%, kompenzira povećanje anuiteta po stopi $p = 20$, 30, 40 i 50%, ovisno o preostalom broju anuiteta k.

Tablica 5.

Relativni iznosi produljenja duljine otplate $u = (l - k) / k$ (u %)

kojima se u potpunosti kompenzira povećanje anuiteta po stopi *p*.

	nominalna godišnja kamatna stopa i											
	5%				6%				7%			
	povećanje anuiteta p				povećanje anuiteta p				povećanje anuiteta p			
k	20%	30%	40%	50%	20%	30%	40%	50%	20%	30%	40%	50%
12	20,6	31,0	41,4	51,9	20,7	31,2	41,7	52,3	20,9	31,4	42,0	52,7
36	21,9	33,2	44,6	56,2	22,4	33,9	45,6	57,7	22,8	34,6	46,7	59,1
60	23,4	35,6	48,2	61,2	24,2	36,9	50,2	64,1	25,0	38,4	52,4	67,1
90	25,4	39,1	53,5	68,8	26,8	41,5	57,3	74,2	28,3	44,2	61,5	80,5
120	27,8	43,2	60,0	78,3	29,9	47,1	**66,4**	88,1	32,3	51,7	74,1	100,7
150	30,5	48,2	68,2	90,9	33,7	54,3	78,8	108,7	37,4	62,0	93,4	136,6
180	33,7	54,3	78,8	108,7	38,3	63,8	97,1	144,6	44,1	77,3	128,5	246,7
210	37,4	62,1	93,5	136,8	44,1	77,3	128,6	247,4	53,3	103,5	257,3	----
240	42,0	72,3	115,8	194,4	51,8	98,7	**215,4**	----	67,0	173,8	----	----
270	47,7	86,6	157,4	----	62,5	142,6	----	----	91,3	----	----	----
300	55,0	109,4	392,4	----	78,9	----	----	----	166,3	----	----	----

Vidi se, primjerice, da je za $i = 6\%$ klijentu kojem je preostalo 20 godina otplate zajma, da bi kompenzirao povećanje anuiteta od $p = 40\%$, potrebno povećati rok otplate za 215,4% ili na više od 43 godine. Za $p > 43,3\%$ (vidi tablicu 3.) potpuna kompenzacije je i teoretski nemoguća, tj. nemoguća je i kada bi klijent živio vječno.

3.1. Donja ograda stope produljenja duljine preostalog roka otplate

Budući da je funkcija $u(p,i,k)$ u (11) strogo rastuća u varijablama $i>0$ i $k>0$, imamo

$$\lim_{i\to 0} u(p,i,k) = p < u(p,i,k) \quad \text{i} \quad \lim_{k\to 0} u(p,i,k) = p < u(p,i,k). \tag{12}$$

Dakle, za bilo koje vrijednosti od k i i, stopa produljenja roka otplate u uvijek je veća od p (vidi sliku 1. i 2. i tablicu 5.) i padajući se približava vrijednosti p, kada se k i i neovisno smanjuju prema nuli. Prema tome uvijek je $u > p$, a za $k \approx 0$ i $i \approx 0$ vrijedi $u \approx p$. Drugim riječima p je donja ograda za u. Posljedično prethodnom vrijedi tvrdnja:

Povećanje anuiteta po stopi p nije moguće u potpunosti kompenzirati produljenjem duljine preostalog roka otplate po stopi manjoj od p, odnosno tvrdnja:

Da bi se u potpunosti kompenziralo povećanje anuiteta po stopi p, preostali rok otplate treba produljiti za više od $p\cdot 100$ %.

Donju ogradu za u ispod koje potpuna kompenzacija niti teoretski nije moguća označimo s u_{LB}. Donja je ograda za u, $u_{LB} = p$, jednostavna, ali dosta gruba. Do bolje ograde, koja se može lako izračunati, dolazimo tako da razvijemo $u(p,i,k)$ u Maclaurinov red. Dobivamo:

$$u(p,i,k) = 0 + \frac{r^k - 1}{k\ln r}\, p + o(p^2) > \frac{r^k-1}{k\ln r}\, p \ \text{ jer je } \ o(p^2) > 0 .$$

Razvijemo li nadalje izraz uz p u Taylorov red oko 1, imamo:

$\dfrac{r^k-1}{k\ln r} = 1+\tfrac{1}{2}k(r-1) + o((r-1)^2) > 1+\tfrac{1}{2}k(r-1)$ jer je $o((r-1)^2) > 0$ za $k \ge 2$. Označimo li s $K = \dfrac{k}{12}$ preostali rok otplate u godinama, uz $r - 1 = \dfrac{i}{12}$,

imamo: $u(p,i,k) > \dfrac{r^k-1}{k\ln r}\, p > (1+\tfrac{1}{2}k(r-1))p = \left(1+\tfrac{1}{2}K\cdot i\right)p$.

Dakle, za $p>0$, $i>0$ i $k\ge 2$ tražena donja ograda za u dana je formulom:

$$u_{LB} = (1+\tfrac{1}{2}K \cdot i\,)p\,. \tag{13}$$

Izrazom $p+\frac{1}{2}K \cdot i \cdot p$ moguće je brzo i jednostavno izračunavanje donje ograde za u.

Iz prethodnog slijedi tvrdnja:

Povećanje anuiteta po stopi p *nije moguće u potpunosti kompenzirati produljenjem duljine preostalog roka otplate po stopi manjoj od* $p+\frac{1}{2}K \cdot i \cdot p$.

ili tvrdnja:

Da bi se u potpunosti kompenziralo povećanje anuiteta po stopi p, *preostali rok otplate treba produljiti za više od* $(p+\frac{1}{2}K \cdot i \cdot p) \cdot 100\,\%$.

Primjerice, uz nominalnu godišnju kamatnu stopu 0,06, ako je preostalo 20 godina otplate, a vrijednost se strane valute iz valutne klauzule poveća za 0,35 (35%),[16] tada će se duljina roka otplate, kojom se to povećanje kompenzira morati povećati po stopi koja je sigurno veća od $(1+\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}06) \cdot 0{,}35 = 1{,}6 \cdot 0{,}35 = 0{,}56$, tj. za više od 56% (točno je 138%). Za preostalih 10 godina, uz $p = 40\,\%$, duljina roka otplate morat će se povećati po stopi koja je sigurno veća od 52% (točno je 66,4%, vidi tablicu 5.).

3.2. Granična vrijednost stope povećanja anuiteta za dano maksimalno produljenje roka otplate

Također, za bilo koju kamatnu stopu i, slijedi tvrdnja:

Ukoliko se preostali rok otplate duljine k*, želi produljiti tako da mu nova duljina ne bude veća od* $l_{\max}$*, tada nije moguća potpuna kompenzacija povećanja anuiteta po stopi* p *većoj od*

$$p_{UB} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}K \cdot i\,)}\left(\frac{l_{\max}}{k} - 1\right). \tag{14}$$

[16] Vrijednost ostatka duga i vrijednost anuiteta povećaju se za 35%.

Izraz u (14) prikladan je za jednostavno izračunavanje gornje ograde p_{UB}, tj. ograde za p preko koje potpuna kompenzacija niti teoretski nije moguća.[17]

Primjerice, uz nominalnu godišnju kamatnu stopu 0,06, ukoliko se razdoblje otplate može produljiti s 15 godina na najviše 20 godina (s 180 na 240 mjeseci), tada se sigurno nikako neće u potpunosti moći kompenzirati povećanje anuiteta po stopi p većoj od $p_{UB} \approx 23\%$. Ukoliko se razdoblje otplate produljuje s 20 na najviše 25 godina, tada isto vrijedi za stope p veće od $p_{UB} \approx 15{,}63\%$.

Prethodna tvrdnja tek daje gornju ogradu za p iznad koje potpuna kompenzacija nije moguća, ali to ne znači da je ona moguća za p ispod te ograde, tj. ne znači da je za sve p manje od p_{UB} potpuna kompenzacija moguća.

Kako je funkcija $p = p(r,k,l)$ u (6) monotono rastuća u varijabli l, to znači da je za l veće od k i manje od $l_{\max}$, potpuna kompenzacija moguća za p manje od $p_l = p(r,k,l_{\max})$.

Tablica 6. prikazuje granične vrijednosti stopa povećanja anuiteta p_l (u %) do koje je potpuna kompenzacija moguća pri produljenju roka otplate s k na $l_{\max}$ mjeseci.

[17] Grublja, ali jednostavnija gornja granica za p je $p_{UB} = l_{\max} \cdot k^{-1} - 1$.

Tablica 6.

Granične vrijednosti stopa povećanja anuiteta p_l (u %) do koje je potpuna kompenzacija moguća pri produljenju razdoblje otplate za $l_{\max} - k$.

	nominalna godišnja kamatna stopa $i = 6\%$								
	produljenje otplate $l_{\max} - k$ (u mjesecima)								
k	12	24	36	48	60	90	120	150	180
12	94,2	182,9	266,5	345,2	419,3	586,4	730,2	854,0	960,7
24	45,7	88,7	129,3	167,4	203,4	284,4	354,2	414,2	466,0
36	29,5	57,4	83,6	108,2	131,5	183,9	229,0	267,8	301,3
48	21,5	41,7	60,8	78,7	95,6	133,7	166,5	194,7	219,1
60	16,7	32,3	47,1	61,0	74,1	103,7	129,1	151,0	169,8
90	10,3	19,9	29,0	37,6	45,6	63,8	79,5	93,0	104,6
120	7,1	13,8	20,1	26,0	31,6	44,1	55,0	64,3	72,3
180	4,0	7,8	11,3	14,6	**17,8**	24,9	31,0	36,2	40,7
240	2,5	4,9	7,1	9,2	**11,2**	15,7	19,5	22,8	25,6
300	1,7	3,3	4,7	6,1	7,5	10,4	13,0	15,2	17,1

Primjerice, uz kamatnu stopu $i = 6\%$, ukoliko se želi razdoblje otplate produljujiti s 15 na najviše 20 godina, tada se sigurno može u potpunosti kompenzirati povećanje anuiteta po stopi p manjoj od 17,79%[18]. Ukoliko se razdoblje otplate želi produljiti s 20 na 25 godina tada isto vrijedi za stope p manje od 11,2%. Budući da je $p = p(r, k, l)$ monotono padajuća u varijabli r , za veće se kamatne stope vrijednosti p_l smanjuju, a za manje povećavaju.

[18] Za p veće od 17,79%, potrebno je produljenje razdoblje otplate s 15 na više od 20 godina, ali i to je teoretski moguće samo za p manji od 68% (vidi tablicu 3.).

4. ZAKLJUČAK

Prethodna analiza pokazuje da odgovor na pitanje potpune kompenzacije povećanja anuiteta kredita s valutnom klauzulom zbog povećanja tečaja valute produljenjem preostalog razdoblja otplate nije jednostavan. Postoje granične vrijednosti za godišnju kamatnu stopu i, duljinu preostalog roka otplate (broj neotplaćenih anuiteta) k i stope povećanja anuiteta p, unutar u praksi mogućih njihovih vrijednosti preko kojih razmatrana potpuna kompenzacija niti teoretski nije moguća.

Kako se i, k i p neovisno povećavaju, unutar u praksi očekivanih vrijednosti, potrebno kompenzirajuće produljenje roka otplate ubrzo postaje preveliko, tako da je potpuna kompenzacija u praksi neostvariva ili neprihvatljiva od strane vjerovnika ili zajmoprimca.

Dakle, uz neku kamatnu stopu, kompenzacija povećanja anuiteta produljenjem roka otplate općenito bi bila neprihvatljiva, osim možda u slučajevima manje kamatne stope, manjeg povećanja anuiteta i ne prevelike duljine preostalog razdoblja otplate.

5. DODATAK

<u>TVRDNJA 1.</u>:

Funkcija $p = p(r,k,l)$, definirana u (6) monotono je padajuća u varijabli $r > 1$.

Dokaz:

$$p = p(r,k,l) = \frac{x_i(k) - x_i(l)}{x_i(l)} = \frac{r^k(r^l-1)}{r^l(r^k-1)} - 1 = \frac{r^l - r^k}{r^l(r^k-1)} = \frac{r^{l-k}-1}{r^{l-k}(r^k-1)},$$

odnosno $p = \dfrac{1-r^{k-l}}{r^k-1}$. Deriviramo li p po r dobivamo:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{r^{k-l-1}}{(r^k-1)^2}\left[-kr^l + l(r^k-1) + k\right].$$

Ako se pokaže da je $\dfrac{\partial p}{\partial r} < 0$ za $r > 1$, slijedi da p strogo monotono pada za $r > 1$.

$\frac{\partial p}{\partial r}$ će biti <0 ako je $-kr^l + l(r^k - 1) + k < 0$, odnosno ako je $\frac{l}{l-k} r^k - \frac{k}{l-k} r^l < 1$. Supstitucijom $x = r^{l-k}$ i $\alpha = \frac{l}{l-k}$ prethodna nejednakost prelazi u

$$\alpha x^{\alpha-1} - (\alpha - 1)x^{\alpha} < 1.$$

Primijetimo da je $\alpha > 1$ i da je $x > 1$ jer je $l > k$ i $r > 1$.

Sada treba dokazati nejednakost $\alpha x^{\alpha-1} - (\alpha - 1)x^{\alpha} < 1$.

Promatrajmo neprekidnu funkciju

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} - (\alpha - 1)x^{\alpha}.$$

Nađemo prvu derivaciju $f'(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1 - x)$, izjednačimo je s 0 i dobijemo stacionarne točke koje uvrstimo u drugu derivaciju. Tako nađemo maksimum funkcije.

$f(x)$ ima maksimum za $x = 1$. Kako je $f(1) = 1$ i $f'(x) < 0$ za $x > 1$ funkcija $f(x)$ strogo monotono pada za $x > 1$.

Dakle sada imamo da je

$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} - (\alpha - 1)x^{\alpha} < 1$, tj. $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$ za $r > 1$ i tvrdnja je dokazana.

$p = p(r, k, l)$ monotono je padajuća u varijabli r.

TVRDNJA 2.:

Funkcija $l = l(p, r, k)$, definirana u (7) monotono je rastuća u varijabli $r > 1$.

Dokaz:

$l = l(p, r, k) = k + \frac{-1}{\ln(r)} \ln\left(1 - p(r^k - 1)\right)$. Deriviramo li l po r dobivamo:

$$\frac{\partial l}{\partial r} = \frac{p\, r^k \ln r^k + (1+p-pr^k)\ln(1+p-pr^k)}{r\ln^2(r)\,(1+p-pr^k)} \,. \tag{*}$$

Ako se pokaže da je $\frac{\partial l}{\partial r} > 0$ za $r > 1$, slijedi da l strogo monotono raste za $r > 1$.

Funkcija l definirana je za r takav da je $0 < (1+p-pr^k)$, a iz uvjeta $p > 0$ i $r > 1$ slijedi $(1+p-pr^k) < 1$. Budući da je nazivnik u (*) > 0, $\frac{\partial l}{\partial r}$ će biti > 0 ako je brojnik u (*) > 0, tj ako je $p\, r^k \ln(r^k) + (1+p-pr^k)\ln(1+p-pr^k) > 0$.

Supstitucijom $x = r^k$ (primijetimo da je $x > 1$) prethodna nejednakost prelazi u

$$p\,x\ln(x) + (1+p-px)\ln(1+p-px) > 0$$

Uvedemo li funkciju $f(x) = p\,x\ln(x) + (1+p-px)\ln(1+p-px)$, treba dokazati da je $f(x) > 0$, za svaki $x > 1$. Budući da je $f(1) = 0$, dokažemo li da je $f(x)$ monotono rastuća za svaki $x > 1$, slijedi da je $f(x) > 0$, odnosno $\frac{\partial l}{\partial r} > 0$ i tvrdnja je dokazana. $f(x)$ monotono je rastuća za svaki $x > 1$, ako je $f'(x) > 0$. Dokažimo da je $f'(x) > 0$.

$$f'(x) = p\ln(x) - p\ln(1+p-px)\,.$$

Budući da je $0 < (1+p-pr^k) < 1$, imamo da je $p\ln(1+p-px) < 0$. Kako je $p > 0$ i $x > 1$, imamo da je $p\ln(x) > 0$. Slijedi da je $f'(x) > 0$ i tvrdnja je dokazana.

Funkcija $l = l(p,r,k)$, definirana u (7) monotono je rastuća u varijabli $r > 1$.

<u>TVRDNJA 3.</u>:

Funkcija $u = u(p,i,k)$, definirana u (11) monotono je rastuća u varijabli $i > 0$.

Dokaz:

$$u(p,i,k) = \frac{l(p,r(i),k)-k}{k}\,.$$

Dokaz slijedi neposredno iz definicije funkcije $u = u(p,i,k)$ i tvrdnje 2.

LITERATURA

Croatian national bank (2006.): *Currency Induced Credit Risk Management Guidelines*, Zagreb, May. http://www.hnb.hr/supervizija/e-smjernice-za-upravljanje-informacijskim-sustavom.pdf

Croatian national bank (2006.): Banks Bulletin 12, year 6, September. http://www.hnb.hr/publikac/bilten-o-bankama/ebilten-o-bankama-12.pdf

Babić, Z., N. Tomić-Plazibat, (2008.): *Poslovna matematika*, 5. izdanje, Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, Split

Dukić, B., Francišković, D., Jukić, D., Scitovski, R., Šilac-Benšić, M. (1994.): *Strategije otplate zajma*, Financijska praksa 18(1994.).

Francišković, Drago (1990.): *Generalizacija kontinuiranog ukamaćivanja i strategije otplate dug*, Ekonomska analiza 24 (2), 179.-197.

Jukić, D., Scitovski, R., (1998.): Matematika I, Elektrotehnički fakultet Osijek.

McCutcheon, J.J., Scott, W.F. (1994.): *An Introduction to the Mathematics of Finance*, The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland, 1986., (reprint).

PBZ (2010.): *The package of measures to facilitate the repayment of housing loans in CHF*, Management Board Office for Corporate Communications, PBZ, Zagreb, 16 September.

Scitovski, R., Šilac-Benšić, M., Francišković, D. (1989.): *Problemi i nesporazumi u primjeni financijske matematike*, Privreda 33.

Šego, B. (2008.): *Financijska matematika*, Zgombić & Partneri, Zagreb.

M. Sc. Drago Franciškovič
Senior lecturer
Međimurje University of Applied Sciences in Čakovec
Bana Josipa Jelačića 22 b, 40000 Čakovec
E-mail: dfrancis@mathos.hr, dfrancis@mev.hr

THE ANALYSIS OF TOTAL COMPENSATION OF THE INCREASE IN INSTALLMENTS OF THE LOAN WITH CURRENCY CLAUSE BY EXTENDING PAYMENT PERIOD

Abstract

This paper studies the instalment of loan with a currency clause, in the case of increasing instalment, due to the increasing value of the currency. Extended repayment period, at which the increase of the instalment is compensated, is derived. The paper derived the functional relationships between such extended repayment period, annual interest rate, the rate of increase of instalment and current repayment period. The paper analyses the relationships between these quantities and presents conclusions related to compensation of increased instalment by extending repayment period. Threshold value of these quantities, above which compensation is not possible, is presented. The rate of extending repayment period is also defines, and easily computable formula for its lower bound is derived.

***Key words*: annuity, instalment, loan, foreign currency clause, loan with a currency clause, compensation, increase in annuity, rate of extension of repayment period.**

JEL classification: E43